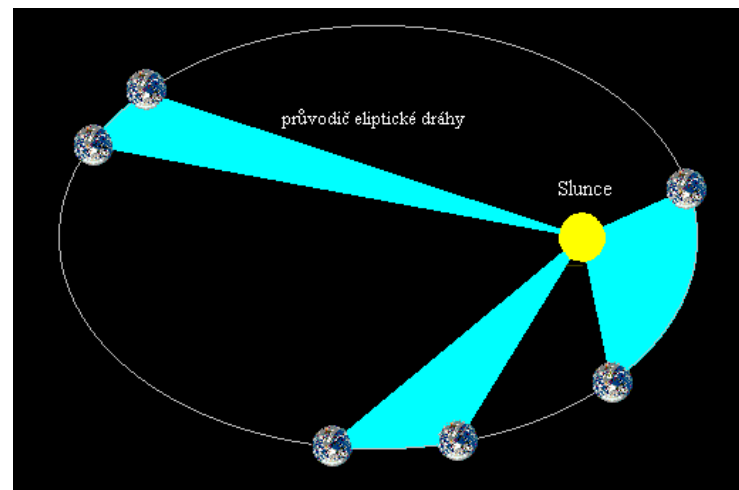
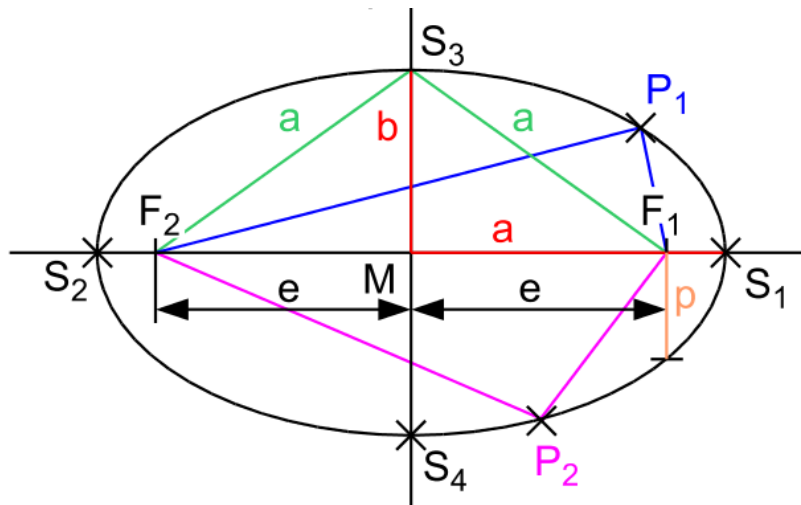


Opakování - Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují okolo Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku je Slunce

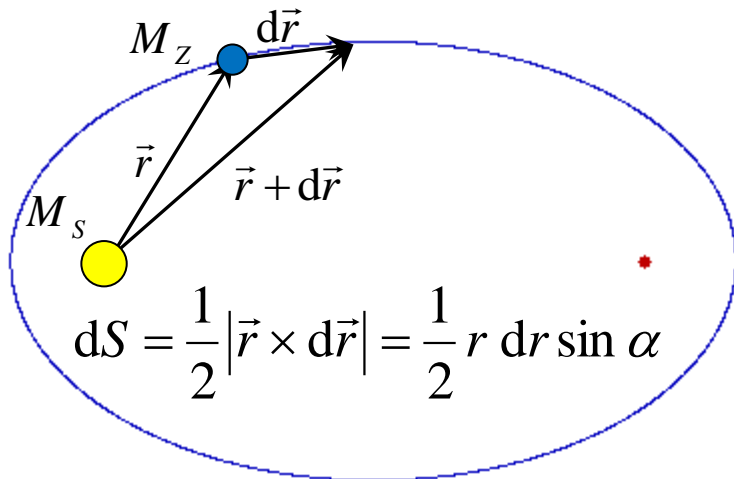
2. Plochy opsané průvodičem planety (spojnicí planety a Slunce) za stejný čas jsou stejné



3. Poměr druhých mocnin oběžných dob je roven poměru třetích mocnin hlavní poloosy

$$T \propto a^{\frac{3}{2}}$$

Opakování - 2. Keplerův zákon



$$M_S \gg M_Z, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{M} \equiv [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{r} \times \frac{-\kappa M_Z M_S}{r^3} \vec{r} = 0$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{b}_0 = \text{konst.}$$

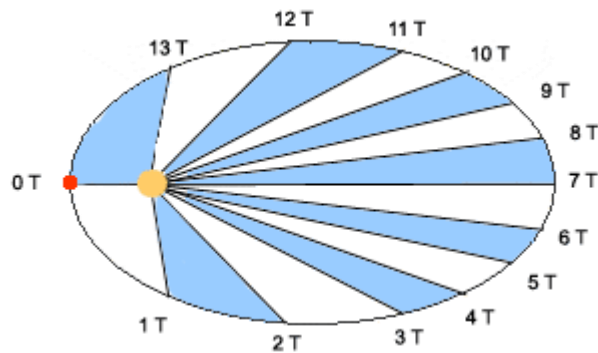
$$|\vec{b}_0| = |\vec{r} \times M_Z \vec{v}| = r M_Z v \sin \alpha = \text{konst.}$$

Vektor momentu hybnosti je kolmý na rovinu danou polohovým vektorem a směrem rychlosti =>
=> pohyb v centrálním gravitačním poli je rovinný

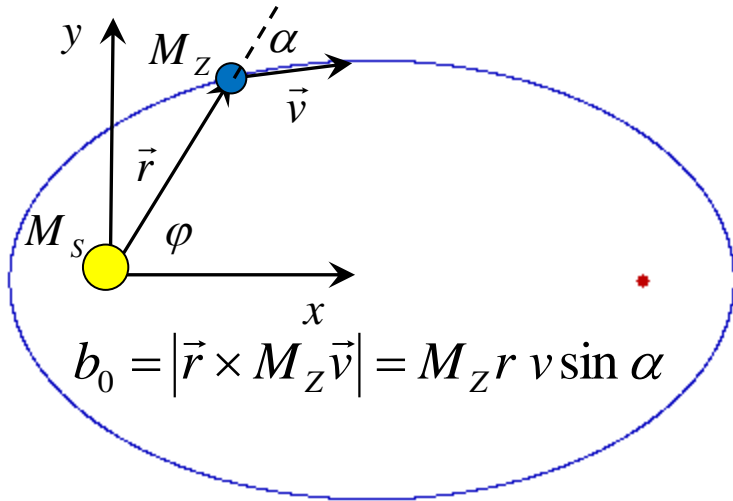
$$v_P = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin \alpha = \frac{b_0}{2M_Z} = \text{konst.}$$

plošná rychlost:

$$v_P = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin \alpha$$



1. Keplerův zákon



$$b_0 = |\vec{r} \times M_Z \vec{v}| = M_Z r v \sin \alpha$$

$$x = r \cos \varphi \Rightarrow v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \Rightarrow v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\gamma^2 M_Z} + 1}, \quad p = \frac{b_0^2}{\gamma M_Z}, \quad \gamma = \kappa M_Z M_s$$

$$E_0 = E_k + E_p = \frac{1}{2} M_Z v^2 - \kappa \frac{M_Z M_s}{r} = \text{konst.}$$

$$E_0 \begin{cases} < 0 & \text{pohyb po elipse} \\ = 0 & \text{pohyb po parabole} \\ > 0 & \text{pohyb po hyperbole} \end{cases}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} M_Z v^2 - \kappa \frac{M_Z M_s}{r} = 0$$

$$\Rightarrow v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_s}{r}} = 42,1 \text{ km/s}$$

3. kosmická rychlost

Kosmické rychlosti

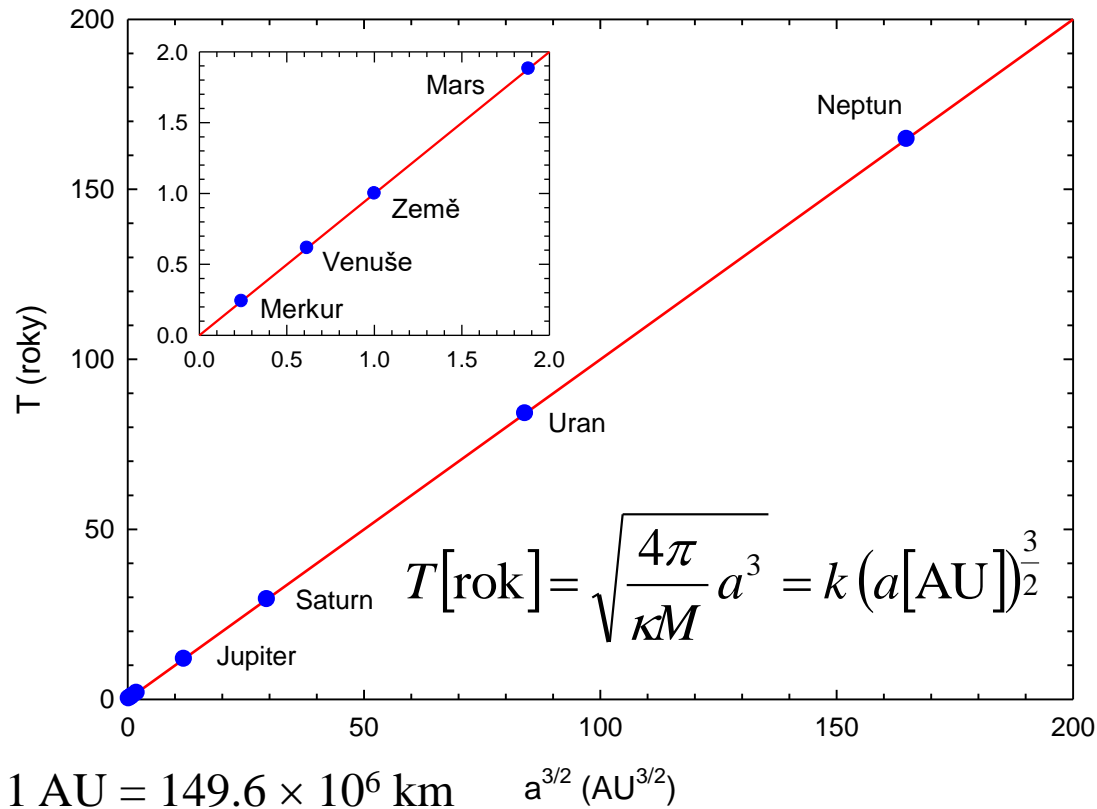
I. kosmická rychlost: $v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} = 7.9 \text{ km s}^{-1}$ rychlost potřebná k vynesení na oběžnou dráhu Země

II. kosmická rychlost: $v_{II} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2 \text{ km s}^{-1}$ rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Země

III. kosmická rychlost: $v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{R_{ZS}}} = 42.1 \text{ km s}^{-1}$ rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Slunce, tj. k opuštění sluneční soustavy

Když využijeme oběžné rychlosti Země 29.7 km s^{-1} tak stačí $42.1 - 29.7 = 12.4 \text{ km s}^{-1}$

Opakování - 3. Keplerův zákon



$$v_P = \frac{dS}{dt} = \frac{b_0}{2M_Z} = \textit{konst.}$$

$$T v_P = \pi a b \Rightarrow T b_0 = 2M_Z \pi a b$$

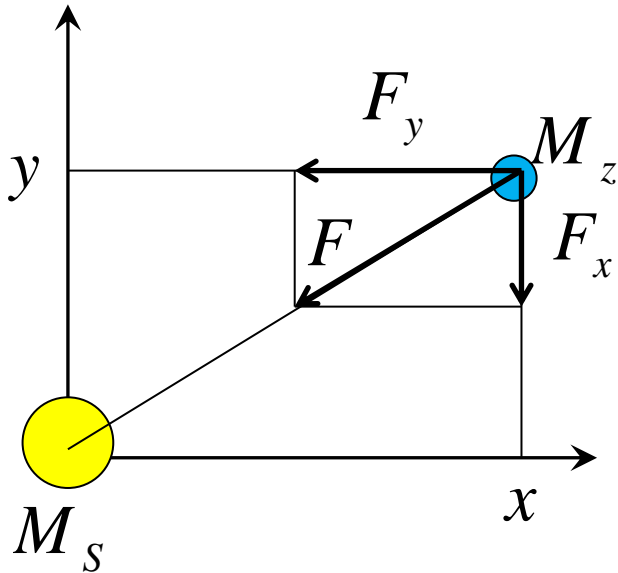
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{b_0^2}{\gamma M_Z} \Rightarrow b = b_0 \sqrt{\frac{a}{\gamma M_Z}}$$

$$T b_0 = 2M_Z \pi a b_0 \sqrt{\frac{a}{\gamma M_Z}}$$

$$\gamma = \kappa M_Z M_S \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M_S} = \textit{konst.}$$

Opakování - Keplerova úloha – trajektorie Země (planet)



$$\vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$M_Z \vec{a} = \vec{F}$$

pohybové rovnice:

$$a_x = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} x$$

$$a_y = \ddot{y} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} y$$

počáteční podmínky:

$$v_x(0) = 0$$

$$v_y(0) = 6.166$$

$$x(0) = 1.0167$$

$$y(0) = 0$$

jednotky:

hmotnost: $M_Z = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$

čas: $1 \text{ rok} = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$

vzdálenost: $1 \text{ AU} = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$

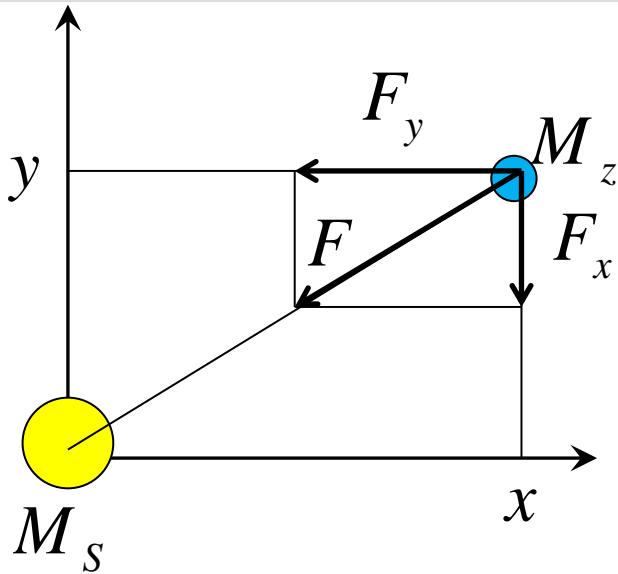
gravitační konstanta:

$$\kappa = 1.18 \times 10^{-4} M_Z^{-1} \text{AU}^3 \text{rok}^{-2}$$

hmotnost Slunce:

$$M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} = 3.33 \times 10^5 M_Z$$

Opakování - Keplerova úloha – trajektorie Země (planet)



$$\vec{F} = -\kappa \frac{M_Z M_S}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Mnoho planet kolem slunce:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

pohybové rovnice:

$$a_x = \ddot{x} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} x$$

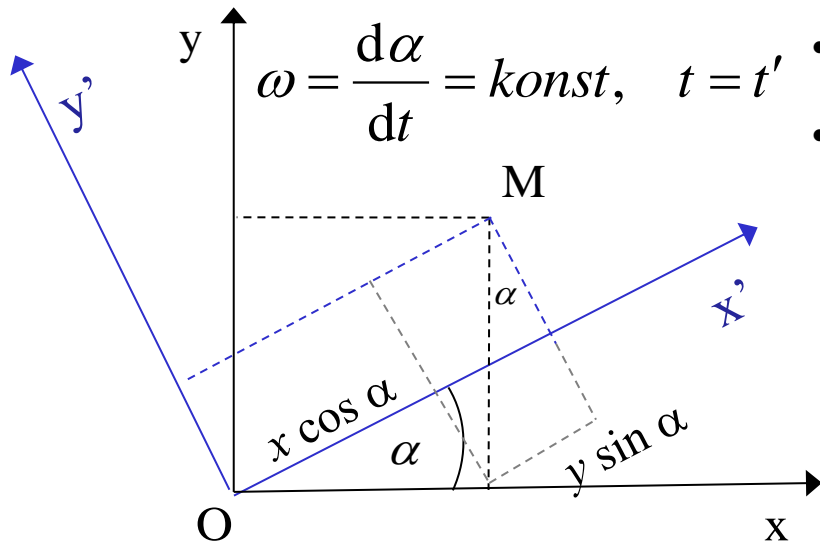
$$a_y = \ddot{y} = -\kappa \frac{M_S}{r^3} y$$

$$M_i \ddot{x} = \sum_{j=1}^N -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (x_i - x_j)$$

$$M_i \ddot{y} = \sum_{j=1}^N -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (y_i - y_j)$$

$$M_i \ddot{z} = \sum_{j=1}^N -\kappa \frac{M_i M_j}{r_{ij}^3} (z_i - z_j)$$

Opakování - pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- kartézská soustava otáčející kolem osy $z = z'$: x', y', z'

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$z' = z$$

$$\omega = -\omega'$$

$$v'_x = v_x \cos \omega t + v_y \sin \omega t - \omega' y'$$

$$v'_y = -v_x \sin \omega t + v_y \cos \omega t + \omega' x'$$

$$v'_z = v_z$$

$$a'_x = a_x \cos \omega t + a_y \sin \omega t - 2\omega' v'_y + \omega'^2 x'$$

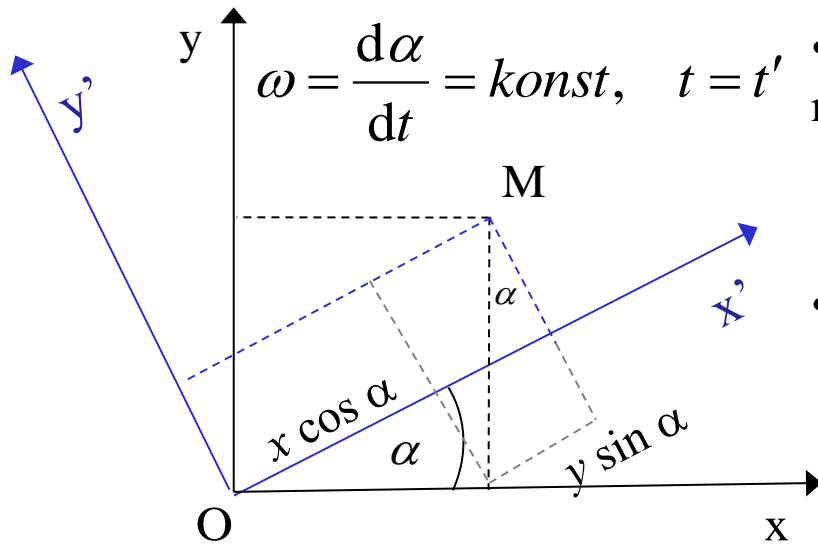
$$a'_y = -a_x \sin \omega t + a_y \cos \omega t + 2\omega' v'_x + \omega'^2 y'$$

$$a'_z = a_z$$

- složky odstředivého zrychlení: $\vec{a}_O = (\omega'^2 x', \omega'^2 y', 0)$

- složky Coriolisova zrychlení: $\vec{a}_C = (-2\omega' v'_y, 2\omega' v'_x, 0)$

Opakování - pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{konst}, \quad t = t'$$

- obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

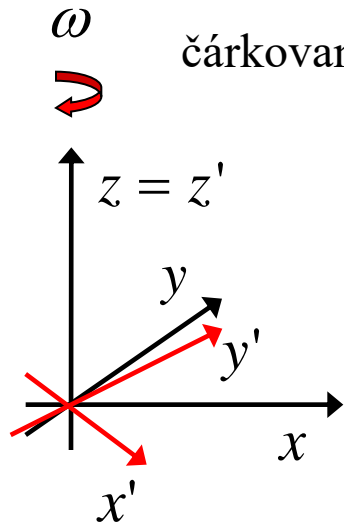
$$\vec{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$$

- Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega}' \times \vec{v}') = -2(\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

- Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu \vec{v}' v rotující soustavě souřadné.
- Odstředivé zrychlení zrychlení při rotaci kolem obecné osy: $\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$
- Velikost odstředivého zrychlení:
 r_K je vzdálenost bodu od osy rotace $a_O = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 r_K$

Síly působící v rovnoměrně rotující soustavě souřadné



ω čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase $t = 0$ oba souřadné systémy splývají

$$\alpha(t) = \omega t$$

rotace kolem obecné osy:

odstředivé zrychlení: $\vec{a}_0 = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

odstředivá síla: $\vec{F}_0 = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

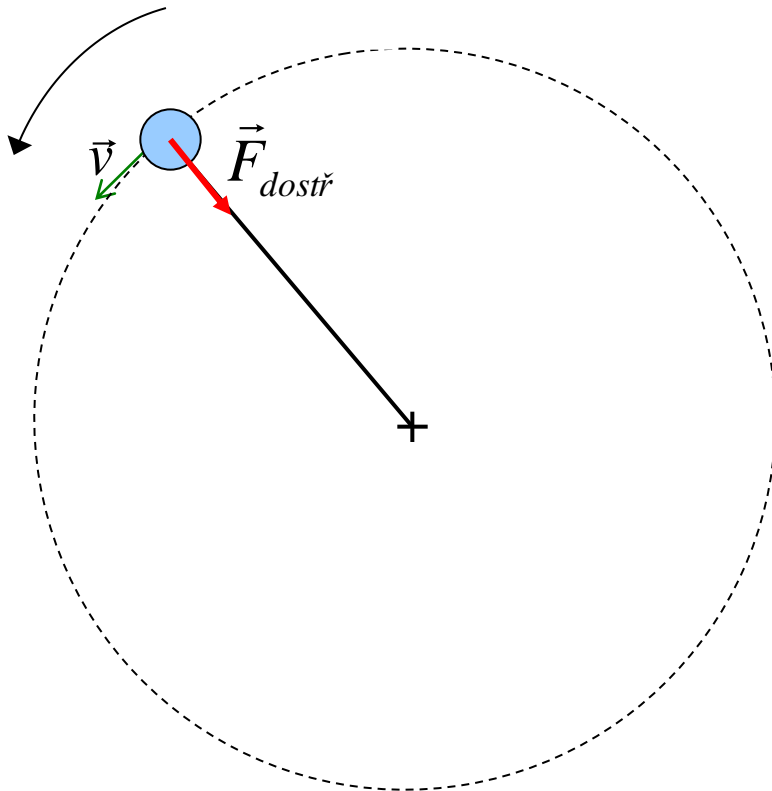
Coriolisovo zrychlení: $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Coriolisova síla: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Odstředivá síla

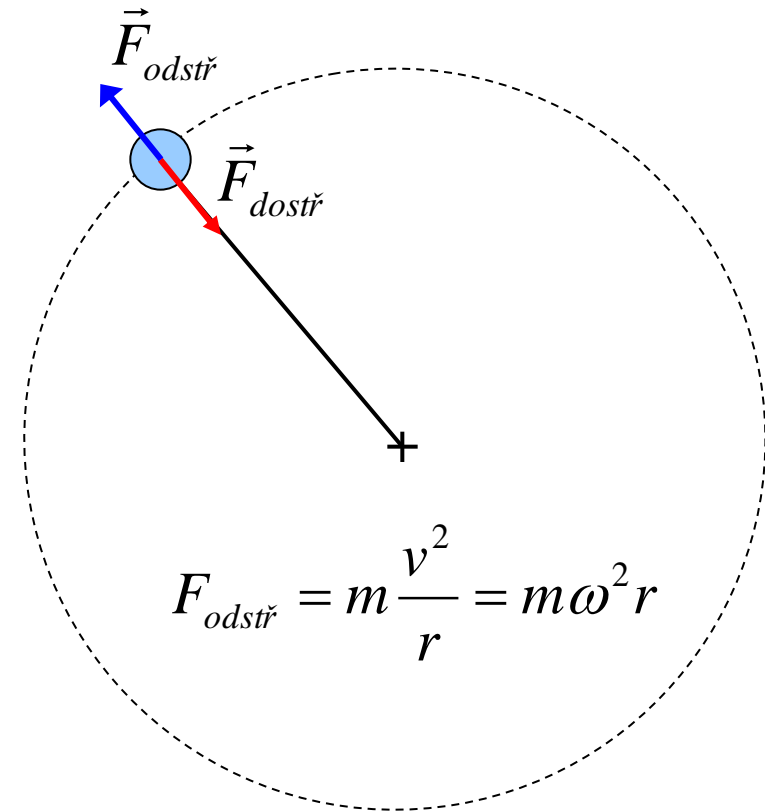
kulička na provázku

pohled z inerciální soustavy



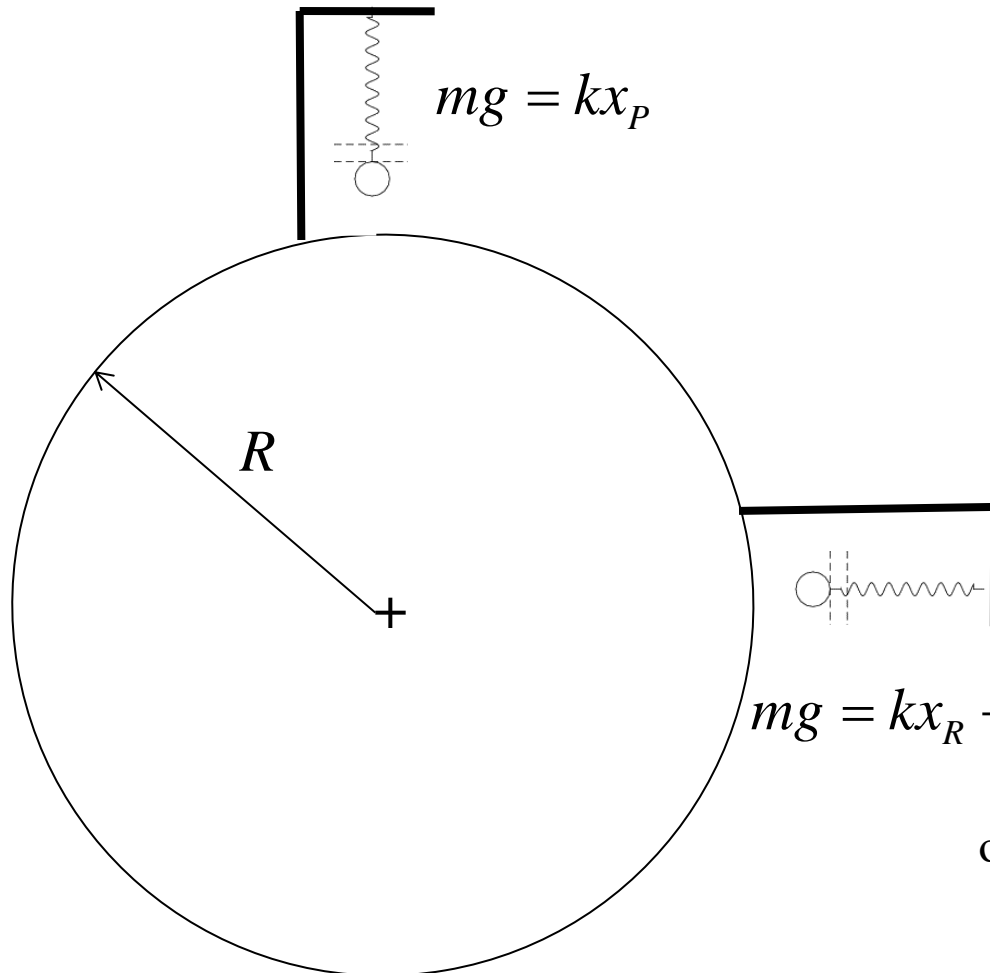
$$\vec{F}_{odstř} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

pohled z neinerciální rotující soustavy



Odstředivá síla - příklad

vážení na pólu a na rovníku



v neinerciální soustavě

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

pro Zemi:

$$\omega = \frac{2\pi R}{T} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$R = 6378 \text{ km}$$

$$T = 24 \text{ hod} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}$$

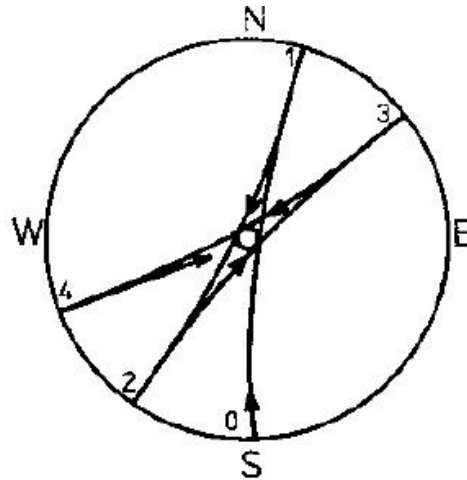
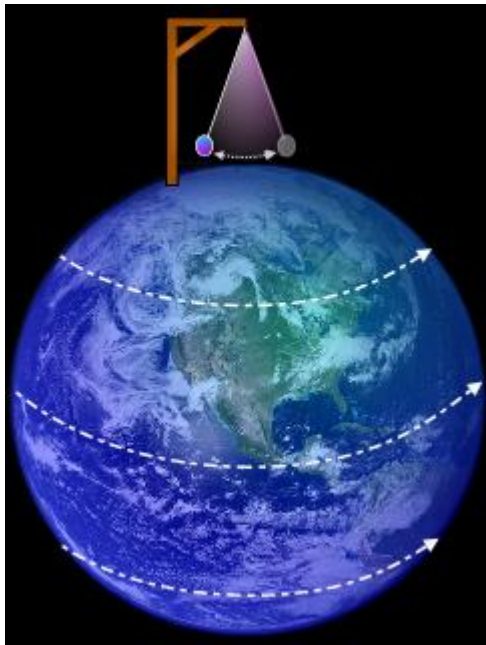
$$\frac{x_P - x_R}{x_P} \approx 0.4 \%$$

odstředivá síla

Coriolisova síla - Foucaltovo kyvadlo

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$F_C = 2m\omega v' \sin \alpha$$



na pólu:

$$360^\circ / \text{den} = 0.25^\circ \text{ min}^{-1}$$

na rovnoběžce za zeměpisnou šířkou ψ : $360^\circ \sin \psi / \text{den}$

v Praze $\psi = 50.08^\circ \longrightarrow 0.19^\circ \text{ min}^{-1}$

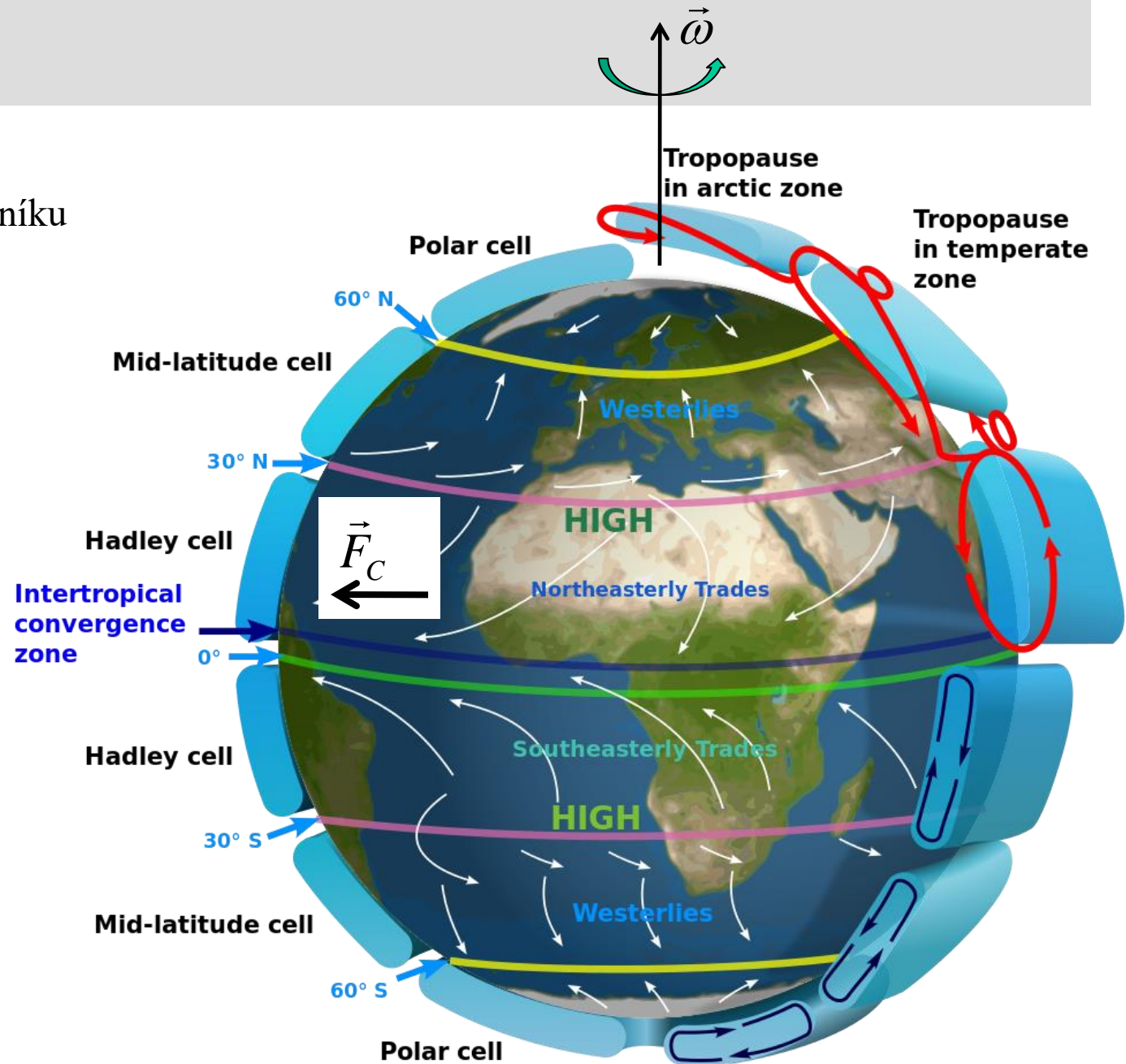
posun za 1 h: 11.5°



Coriolisova síla

- pasáty vanoucí směrem k rovníku

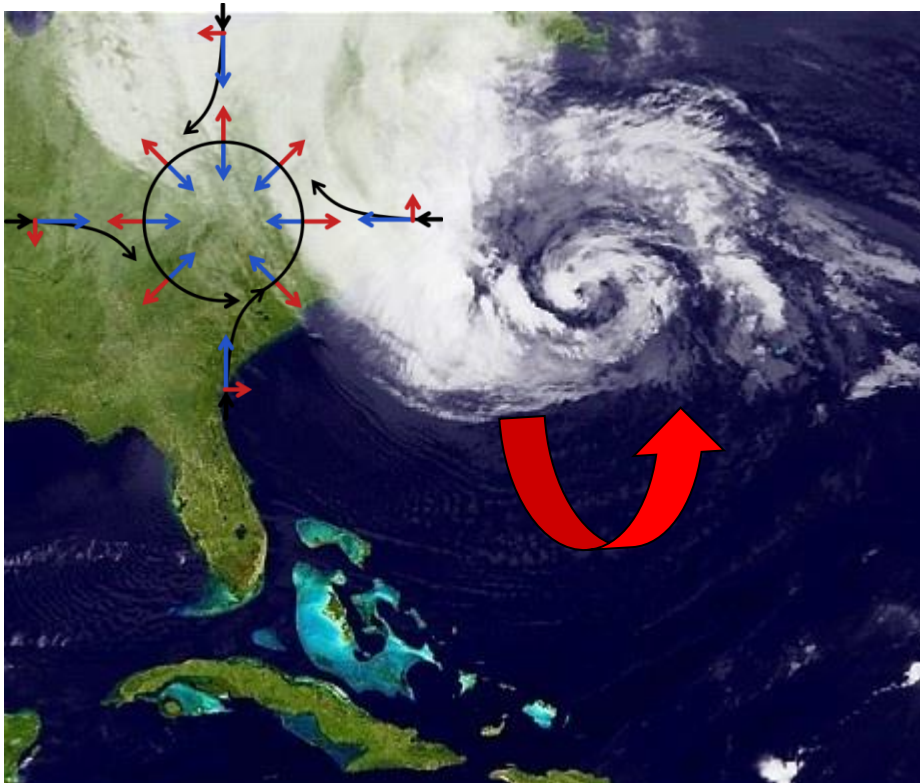
$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



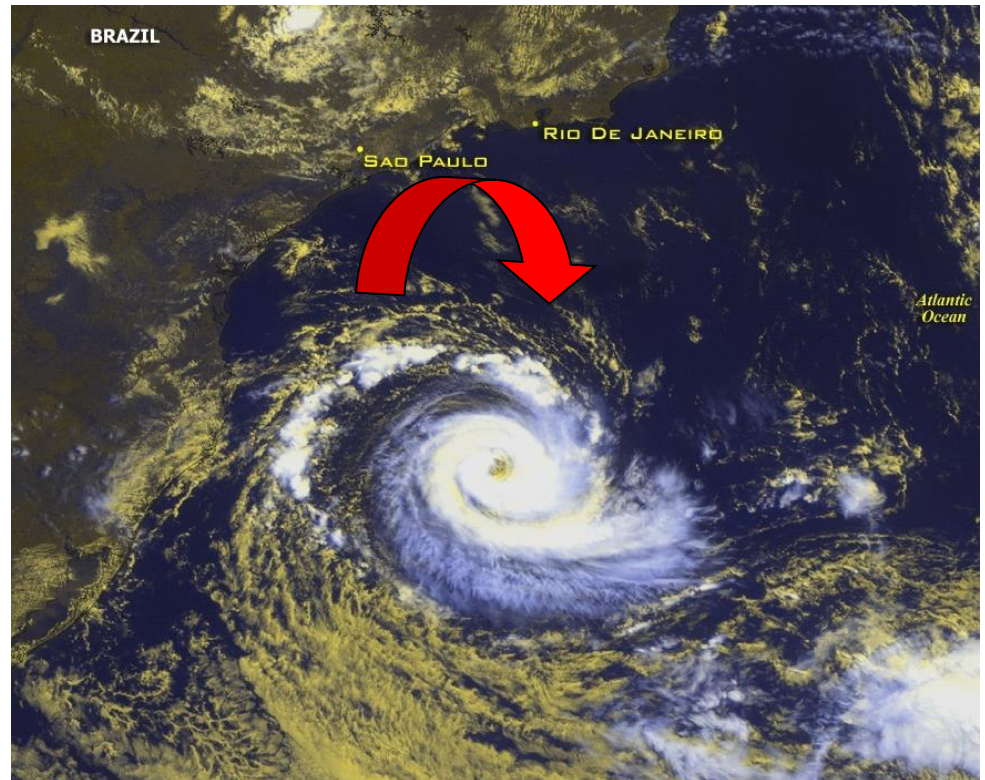
Coriolisova síla

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

hurikán Sandy v severním atlantiku 25.10. 2012



tropická bouře v jižním atlantiku 26.3. 2004



Opakování - souvislost potenciálu a intenzity pole

těleso o hmotnosti m :

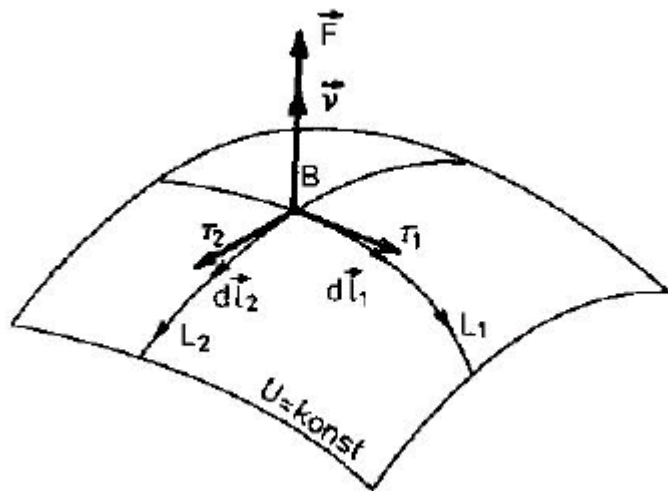
potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

potenciální energie : $W_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

intenzita: $\vec{I}(\vec{r}) = \vec{I}(x, y, z)$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{I}(\vec{r})$

$\varphi(x, y, z) = konst.$



gradient

$$\vec{I} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \equiv -\text{grad } \varphi \equiv -\nabla \varphi$$

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) \equiv -\nabla E_p$$

Opakování - souvislost potenciálu a intenzity pole

Př. gravitační pole:

$$\varphi = -\kappa \frac{M}{r} = -\kappa \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

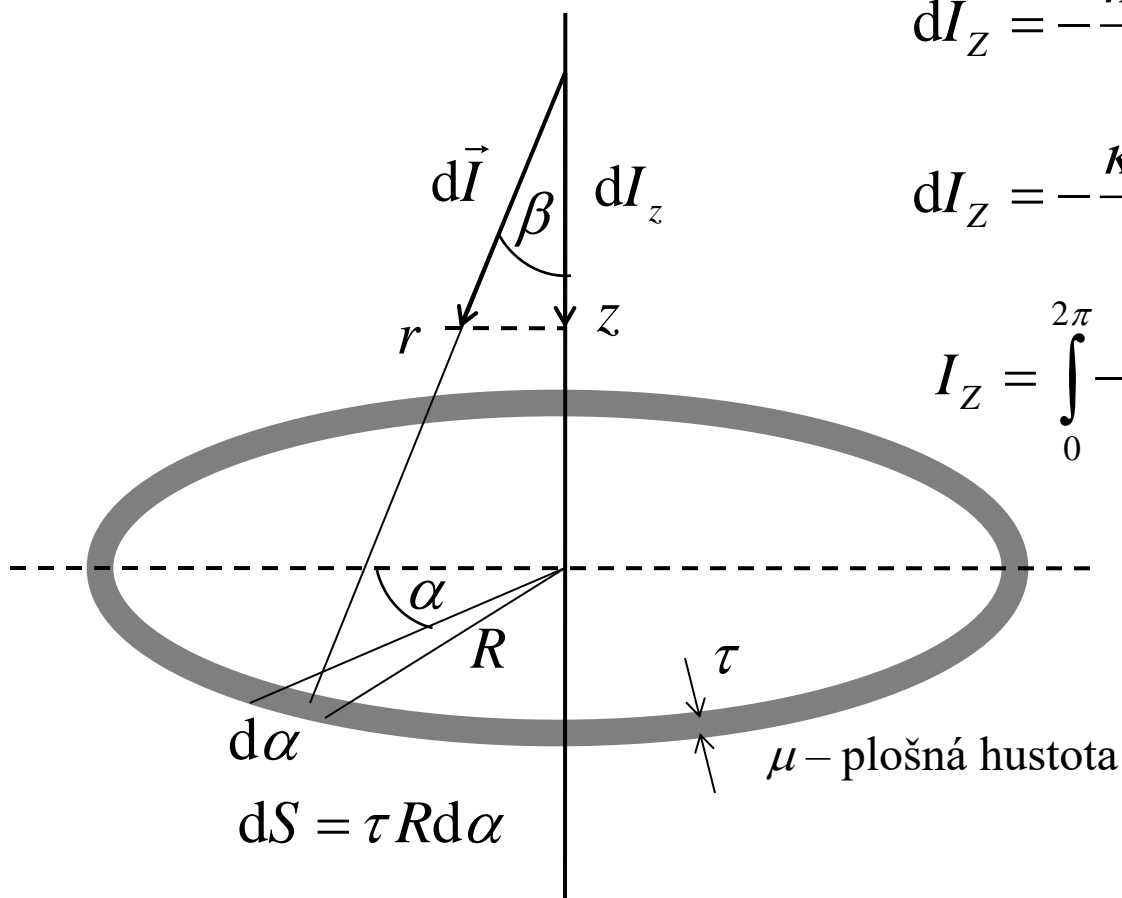
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\kappa M \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\kappa M \frac{(-\frac{1}{2})2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\nabla \varphi = \left(\kappa \frac{M x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \kappa \frac{M z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \kappa \frac{M \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{I} = -\nabla \varphi = -\kappa \frac{M \vec{r}}{r^3}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- gravitační pole v ose prstence



$$dm = \mu dS = \mu \tau R d\alpha$$

$$dI_z = -\frac{\kappa dm \cos \beta}{r^2} \quad \cos \beta = \frac{z}{r}$$

$$dI_z = -\frac{\kappa \tau \mu R z d\alpha}{r^3} = -\frac{\kappa \tau \mu R z d\alpha}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

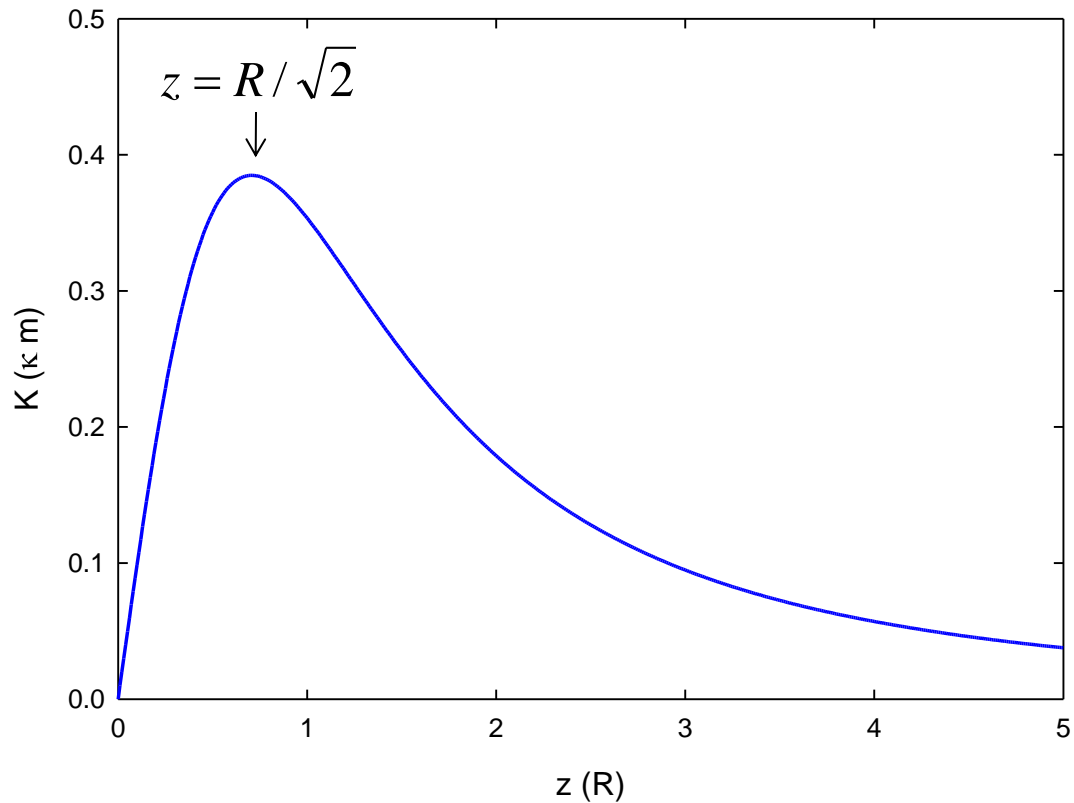
$$I_z = \int_0^{2\pi} -\frac{\kappa \tau \mu R z d\alpha}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\kappa \tau \mu R z 2\pi}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$I_z = -\frac{\kappa m z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- gravitační pole v ose prstence

velikost intenzity gravitačního pole

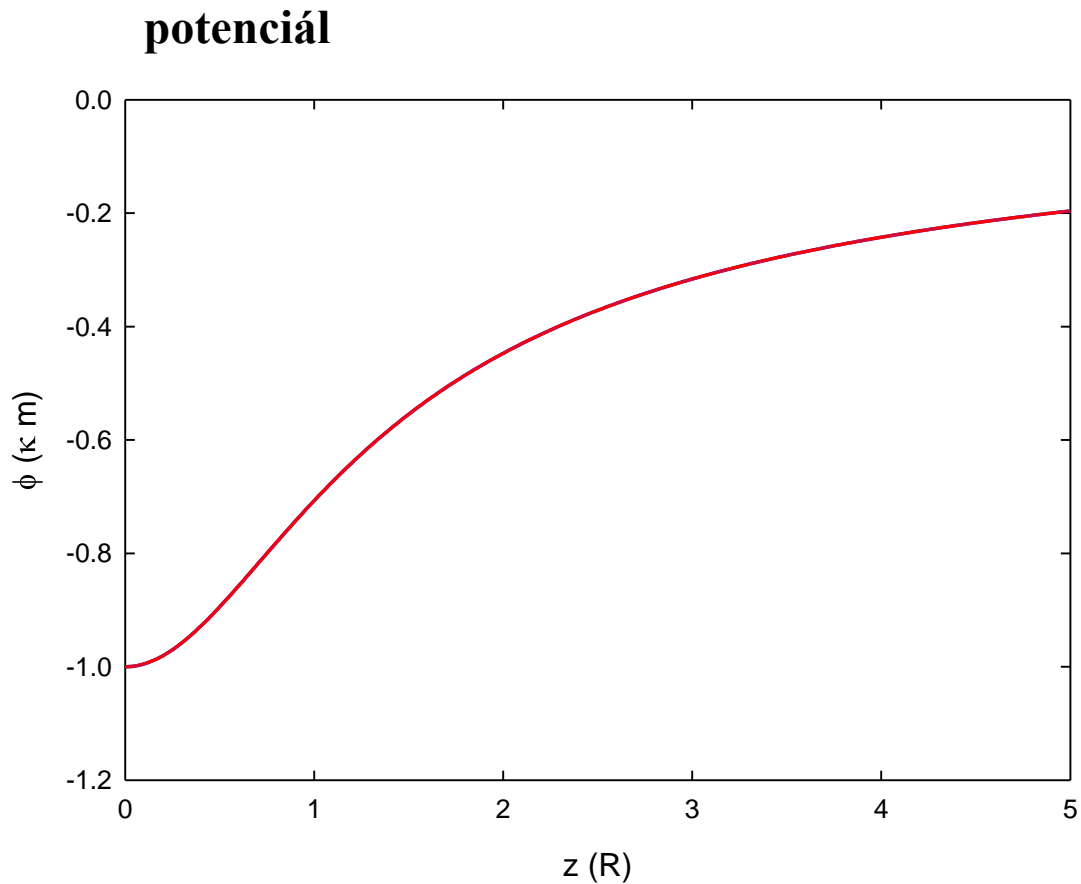


$$I_Z = \frac{\kappa m z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

I_Z je maximální v $z = R/\sqrt{2}$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- gravitační pole v ose prstence



$$\varphi_z = - \frac{\kappa m}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

• dutá koule, vně

potenciál:

$$d\varphi = -\frac{\kappa dm}{r}$$

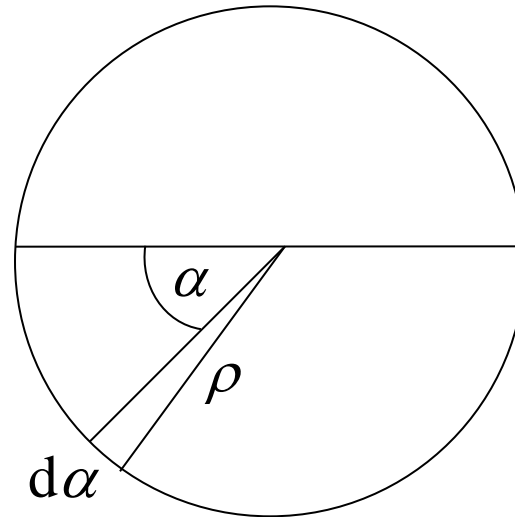
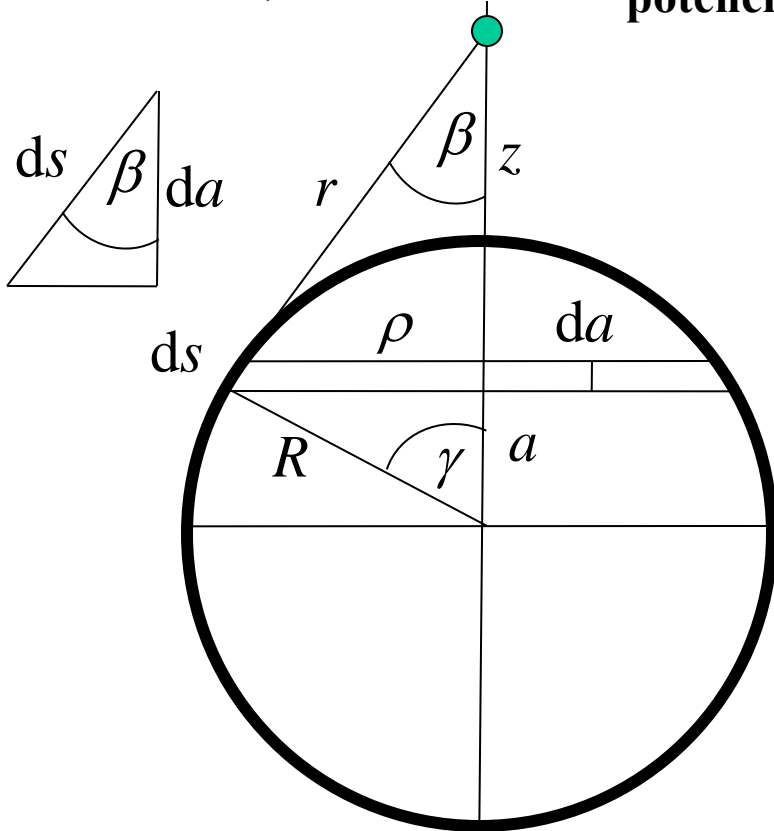
$$dm = \rho \mu d\alpha ds$$

$$ds = \frac{da}{\sin \gamma} = R \frac{da}{\rho}$$

$$dm = \mu R d\alpha da$$

$$d\varphi = -\frac{\kappa \mu R d\alpha da}{r}$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{z-R}^{z+R} \frac{\kappa \mu R d\alpha dr}{z}$$



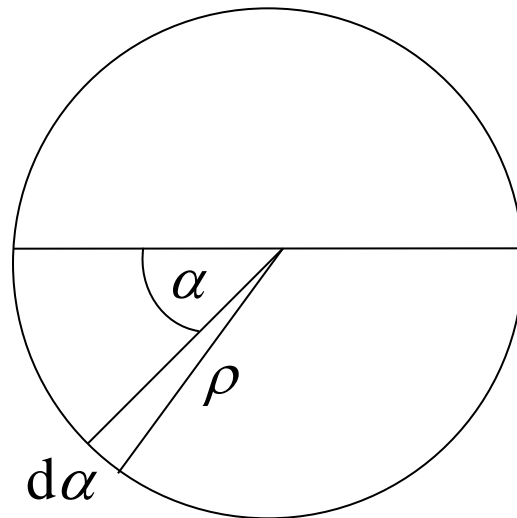
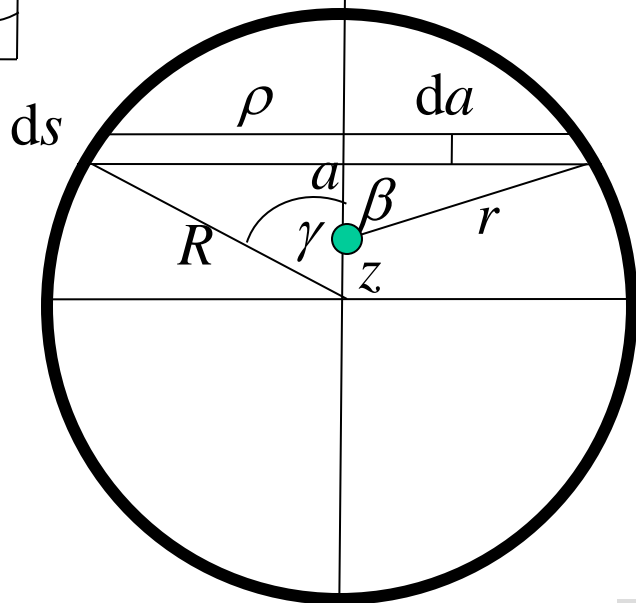
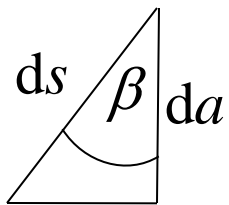
$$r^2 = (z - a)^2 + \rho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

$$r dr = -z da$$

potenciál vně koule:
$$\varphi = -\frac{\kappa \mu 4\pi R^2}{z} = -\frac{\kappa m}{z}$$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

• dutá koule, uvnitř



potenciál: $d\varphi = -\frac{\kappa dm}{r}$

$$dm = \rho \mu d\alpha ds$$

$$ds = \frac{da}{\sin \gamma} = R \frac{da}{\rho}$$

$$dm = \mu R d\alpha da$$

$$d\varphi = -\frac{\kappa \mu R d\alpha da}{r}$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{z+R}^{R-z} \frac{\kappa \mu R d\alpha dr}{z}$$

$$r^2 = (z-a)^2 + \rho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

$$r dr = -z da$$

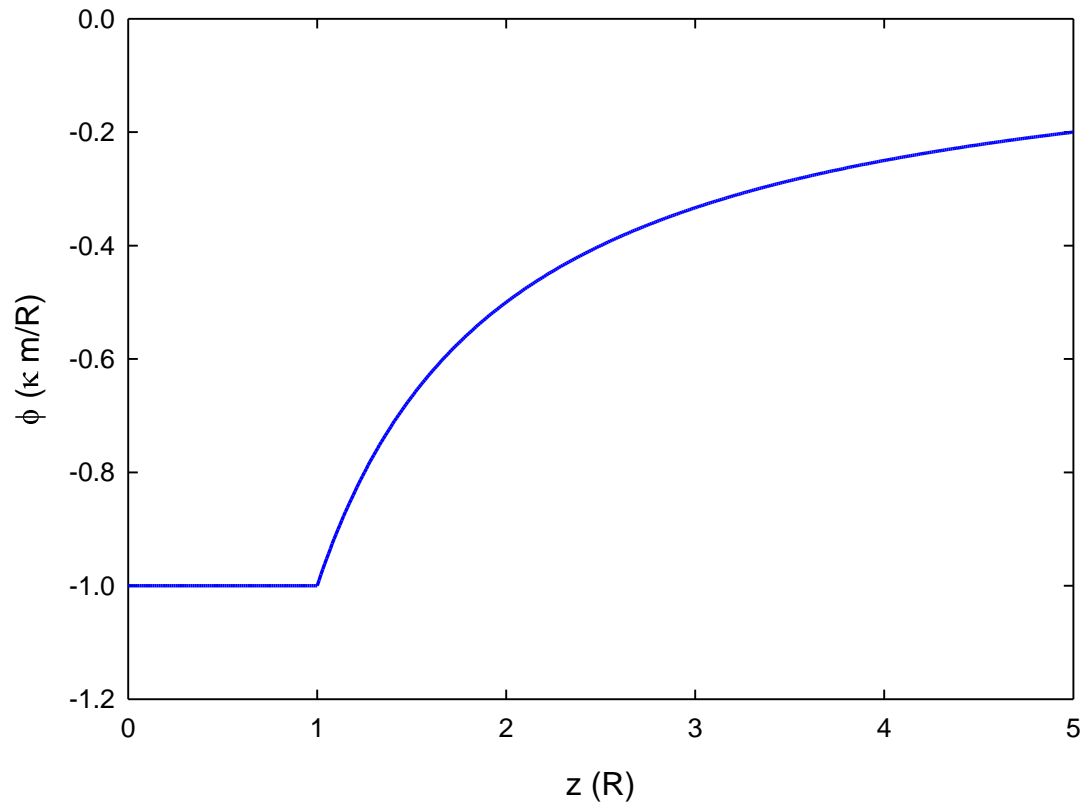
potenciál uvnitř koule: $\varphi = -\kappa \mu 4\pi R = \frac{-\kappa m}{R} = \text{konst}$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

• dutá koule

potenciál: uvnitř koule ($z < R$): $\varphi_z = -\frac{\kappa m}{R} = \text{konst}$

vně koule ($z \geq R$): $\varphi_z = -\frac{\kappa m}{z}$



Výpočet potenciálu gravitačního pole

• dutá koule

intenzita:

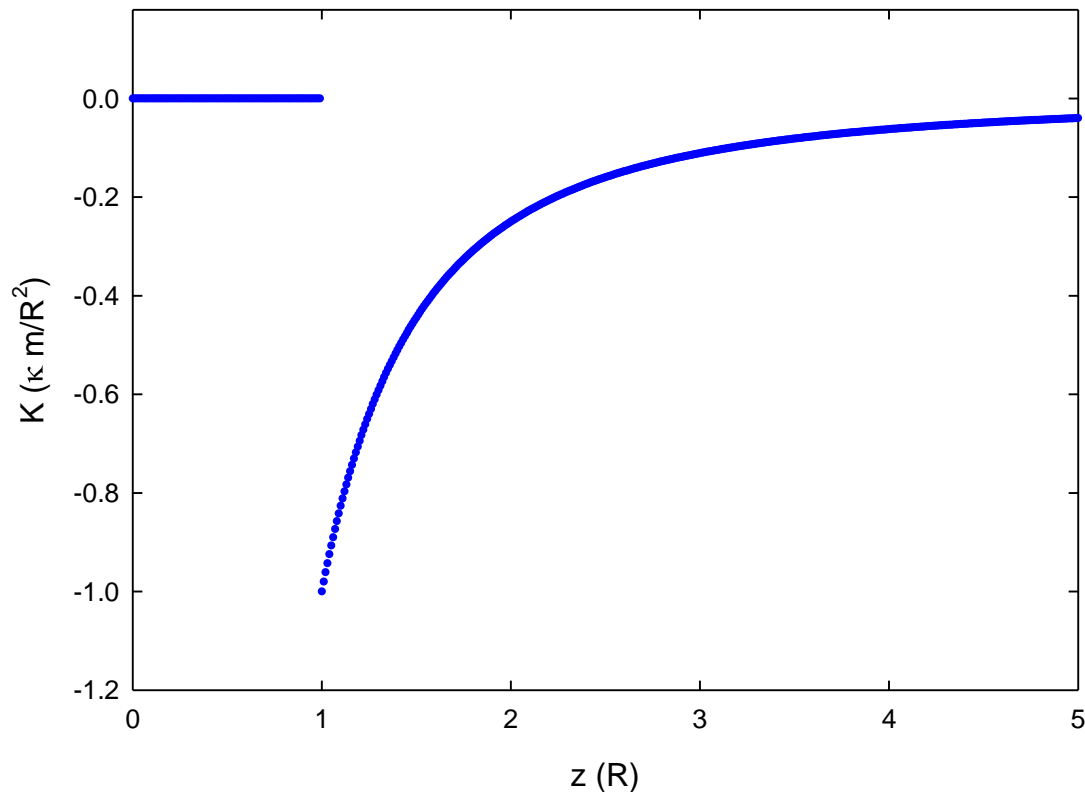
uvnitř koule ($z < R$):

$$I_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{I} = 0$$

$$\vec{I} = -\nabla \varphi$$

vně koule ($z \geq R$):

$$I_z = \kappa m \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{\kappa m}{z^2}$$



Potenciál pole

celková energie: $E = E_K + E_p$

